

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a V-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

Subiectul I (20 puncte)

Se consideră numerele $a = (2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+2} \cdot 3^n - 6^n) : 6^n$ și

$b = (25^n \cdot 3^n + 4 \cdot 15^n \cdot 5^{n+1} + 6^{n+1} \cdot 2^n \cdot 5^{2n+1}) : 51$, unde n este un număr natural.

Arătați că $2^n \cdot a^n \cdot b$ este pătratul unui număr natural pentru orice număr natural n .

Soluție:

Calculând:

$$a = (2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 2^2 \cdot 3^n - 2^n \cdot 3^n) : 6^n = 2^n \cdot 3^n \cdot (3 + 4 - 1) : 6^n = 6$$

$$b = (5^{2n} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 5^n \cdot 5 + 2^n \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 5^{2n} \cdot 5) : 51 =$$

$$b = 5^{2n} \cdot 3^n \cdot (1 + 20 + 30) : 51 = 5^{2n} \cdot 3^n$$

$\Rightarrow 2^n \cdot a^n \cdot b = 2^n \cdot 6^n \cdot 5^{2n} \cdot 3^n = (2 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 3)^n = (30^n)^2$ este pătrat perfect pentru orice număr natural n .

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $a = (2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 2^2 \cdot 3^n - 2^n \cdot 3^n) : 6^n =$ $= 2^n \cdot 3^n \cdot (3 + 4 - 1) : 6^n = 6$	8p
Deduce $b = (5^{2n} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 5^n \cdot 5 + 2^n \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 5^{2n} \cdot 5) : 51 =$ $5^{2n} \cdot 3^n \cdot (1 + 20 + 30) : 51 = 5^{2n} \cdot 3^n$	8p
Deduce că $2^n \cdot a^n \cdot b = 2^n \cdot 6^n \cdot 5^{2n} \cdot 3^n = (2 \cdot 6 \cdot 5^2 \cdot 3)^n = (30^n)^2$ este pătrat perfect pentru orice număr	4p
Total	20p

Subiectul II (20 puncte)

Ana a așezat 100 de mere în patru coșuri. Numărul de mere din cele 4 coșuri ar fi fost același, dacă în primul coș ar fi pus cu 5 mere mai puțin, în al doilea ar mai fi adăugat 4 mere, în al treilea coș ar fi pus de trei ori mai puține mere, iar în al patrulea de două ori mai multe.

a) Aflați de câte ori este mai mare numărul de mere din al treilea coș față de numărul de mere din al patrulea coș.

b) Determinați numărul de mere din fiecare coș.

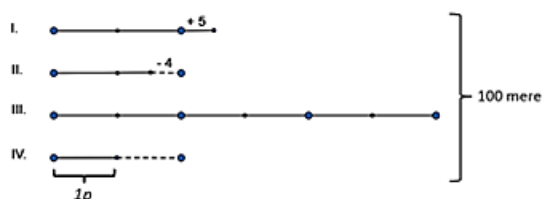
Soluție:

a) Dacă c este numărul de mere din al treilea coș, iar d este numărul de mere din al patrulea coș, atunci

$$c : 3 = d \cdot 2 \Rightarrow c = 6 \cdot d$$

Deci, în al treilea coș sunt de 6 ori mai multe mere decât în al patrulea coș.

b) Folosind datele problemei, se poate întocmi următoarea reprezentare grafică:



Din reprezentarea grafică se deduce că $11p + 5 - 4 = 100$.

Se obține $p = 9$.

Se determină numărul de mere din fiecare coș: I = 23 mere; II = 14 mere; III = 54 mere; IV = 9 mere.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Deduce relația dintre numărul de mere din al treilea coș și cel din al patrulea coș: $c : 3 = d \cdot 2$	3p
Deduce că $c = 6 \cdot d$	2p
Deci, în al treilea coș sunt de 6 ori mai multe mere decât în al patrulea coș	
b) Pe baza datelor din problemă, întocmește reprezentare grafică.	5p
Deduce că $11p + 5 - 4 = 100$	5p
Obține $p = 9$	3p
Determină numărul de mere din fiecare coș: I = 23 mere; II = 14 mere; III = 54 mere; IV = 9 mere	2p
Total	20p

Subiectul III (25 puncte)

Împărțind un număr de 4 cifre la răsturnatul său, obținem câtul 6 și restul 139. Aflați numărul, știind că diferența dintre cifra miilor și cea a unităților este 6, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a zecilor este 7.

Soluție:

Fie $n = \overline{abcd}$ numărul căutat. Răsturnatul său este \overline{dcba} .

Conform ipotezei, $\overline{abcd} = 6 \cdot \overline{dcba} + 139$

Dacă $d \geq 2$, atunci $n > 12000$, fals. Deci $d = 1$. Rezultă că $a = 1 + 6 = 7$

Obținem $7001 + 10 \cdot \overline{bc} = 6042 + 60 \cdot \overline{cb} + 139$, de unde $82 + \overline{bc} = 6 \cdot \overline{cb}$

Rezultă că $82 + 4b = 59c$

Cum $b = c + 7$, avem $82 + 4(c + 7) = 59c$. Obținem $c = 2$.

Atunci $b = 2 + 7 = 9$. Numărul căutat este $n = 7921$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Fie $n = \overline{abcd}$ numărul căutat. Răsturnatul său este \overline{dcba} .	3p
Conform ipotezei, $\overline{abcd} = 6 \cdot \overline{dcba} + 139$	4p
Dacă $d \geq 2$, atunci $n > 12000$, fals. Deci $d = 1$.	4p
Rezultă că $a = 1 + 6 = 7$	3p
Obținem $7001 + 10 \cdot \overline{bc} = 6042 + 60 \cdot \overline{cb} + 139$,	3p
Rezultă că $82 + \overline{bc} = 6 \cdot \overline{cb}$	2p
Rezultă că $82 + 4b = 59c$	2p
Cum $b = c + 7$, avem $82 + 4(c + 7) = 59c$. Obținem $c = 2$.	2p
Atunci $b = 2 + 7 = 9$.	1p
Numărul căutat este $n = 7921$.	1p
Total	25p

Subiectul IV (25 puncte)

Determinați tripletele de numere naturale nenule (a, b, c) pentru care $(a + b)^4 = 3 \cdot c! + 2383$, unde $c! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c$.

Soluție:

Dacă $c \geq 5$, atunci $U_c(3 \cdot c! + 2383) = 3$.

$U_c((a + b)^4) \in \{0, 1, 5, 6\}$, $U_c((a + b)^4) \neq 3 \Rightarrow c \in \{1, 2, 3, 4\}$

Observăm că $6^4 = 1296 < 2383$, $7^4 = 2401$ și $8^4 = 4096$.

Dacă $c = 1 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 + 2383 = 2386 \neq 2401$ fals

Dacă $c = 2 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 \cdot 2 + 2383 = 2389 \neq 2401$ fals

Dacă $c = 3 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 \cdot 6 + 2383 = 2401 \Rightarrow a + b = 7 \Rightarrow$

$S = \{(1, 6, 3); (2, 5, 3); (3, 4, 3); (4, 3, 3); (5, 2, 3); (6, 1, 3)\}$

Dacă $c = 4 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 \cdot 24 + 2383 = 2455 \neq 2401$ fals.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce că dacă $c \geq 5$ $U_c(3 \cdot c! + 2383) = 3$	5p
Determină că $U_c((a + b)^4) \in \{0, 1, 5, 6\}$, $U_c((a + b)^4) \neq 3$	5p
Deduce că $c \in \{1, 2, 3, 4\}$	2p
Observă că $6^4 = 1296 < 2383$, $7^4 = 2401$ și $8^4 = 4096$	3p
Analizează că dacă $c = 1 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 + 2383 = 2386 \neq 2401$ fals	2p
Analizează că dacă $c = 2 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 \cdot 2 + 2383 = 2389 \neq 2401$ fals	2p
Analizează că dacă $c = 3 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 \cdot 6 + 2383 = 2401 \Rightarrow a + b = 7 \Rightarrow$ $S = \{(1, 6, 3); (2, 5, 3); (3, 4, 3); (4, 3, 3); (5, 2, 3); (6, 1, 3)\}$	4p
Analizează că dacă $c = 4 \Rightarrow (a + b)^4 = 3 \cdot 24 + 2383 = 2455 \neq 2401$ fals	2p
Total	25p